Concours Centrale - Supélec 1996

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Option TA

Un espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ dont les axes $(O;\vec{i})$, $(O;\vec{j})$, $(O;\vec{k})$ et les plans $(O;\vec{i},\vec{j})$, $(O;\vec{j},\vec{k})$, $(O;\vec{k},\vec{i})$ sont plus simplement notés respectivement Ox, Oy, Oz, xOy, yOz, zOx. On considère la surface S décrite par les points de l'espace $M(t,\lambda)$ de coordonnées

$$\begin{cases} x = a\cos t - \lambda\cos t\sin t \\ y = a\sin t + \lambda\cos^2 t \\ z = \lambda \end{cases}$$

où chacun des deux paramètres t et λ varie dans $\mathbb{R}$ et où a est un réel strictement positif donné.

Partie I - Éléments de symétrie de S

I.A - Comparer les points $M(t,\lambda)$ et $M(\pi+t,-\lambda)$. En déduire une première symétrie conservant S.

I.B - Comparer les points $M(t,\lambda)$ et $M(\pi-t,\lambda)$. En déduire une deuxième symétrie conservant S.

I.C - Mettre en évidence une troisième symétrie conservant S.

Partie II - Intersections de S avec les plans du repère

II.A - Préciser l'intersection de S avec le plan xOy.

II.B - Montrer que l'intersection de S avec le plan yOz est la réunion de deux droites et de deux demi-droites que l'on représentera avec précision sur un dessin.

II.C -

II.C.1) Montrer que l'intersection de S avec le plan zOx est la réunion des deux courbes

$$L_1 \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = \dfrac{x}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \end{cases}$$

$$L_2 \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = -\dfrac{x}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \end{cases}$$

II.C.2) Comment L_2 se déduit-elle de L_1 ?

II.C.3) Tracer L_1 et L_2 dans le plan zOx. On précisera les tangentes aux points d'abscisses a et $-a$, les branches infinies et les points d'inflexion.

Partie III - Courbes coordonnées de S

III.A - **Courbes $\lambda = \lambda_0$ où λ_0 est un réel donné.**

III.A.1) Que peut-on dire, sans aucun calcul, d'une telle courbe C_{λ_0} ?

III.A.2) Que devient C_{λ_0} quand $\lambda_0 = 0$?

III.A.3) Tracer soigneusement dans le plan xOy la projection sur ce plan de C_{λ_0} quand $\lambda_0 = a$. On précisera notamment les éléments de symétrie et la tangente au point singulier.

III.A.4) Calculer l'aire intérieure à C_{λ_0} quand $\lambda_0 = a$.

III.B - **Courbes $t = t_0$ où t_0 est un réel donné.**

III.B.1) Montrer qu'une telle courbe est une droite D_{t_0} dont on donnera un vecteur directeur $\vec{V_0}$ et le point d'intersection M_0 avec le plan xOy.

III.B.2) Préciser la droite D_{t_0} dans chacun des quatre cas suivants :

$$t_0 = 0 \ (mod 2\pi),\ t_0 = \pi \ (mod 2\pi),\ t_0 = \frac{\pi}{2} \ (mod 2\pi),\ t_0 = -\frac{\pi}{2} \ (mod 2\pi)$$

III.B.3) Que peut-on dire, quand t_0 varie, de la projection orthogonale D'_{t_0} de D_{t_0} sur le plan xOy par rapport au cercle de centre O et de rayon a de ce plan ?

MATHÉMATIQUES II

III.B.4) Pour $t_0 \neq 0 \ (mod \pi/2)$, quel est le point d'intersection N_0 de D_{t_0} avec le plan yOz ? Quel est l'ensemble décrit par N_0 quand t_0 varie ?

III.B.5) Pour $t_0 \neq 0 \ (mod \pi/2)$, calculer l'aire $\mathcal{A}_0$ du triangle ON_0P_0 où P_0 est la projection orthogonale de M_0 sur le plan yOz. Que peut-on dire de $\mathcal{A}_0$ quand t_0 varie ?

III.B.6) Déterminer dans le plan yOz l'enveloppe E de la projection orthogonale D''_{t_0} de D_{t_0} sur ce plan. On donnera une équation cartésienne de E et on indiquera sa nature géométrique.

Partie IV - Définition géométrique de S

IV.A -

IV.A.1) Que peut-on dire de la position de D_{t_0} par rapport au cylindre Γ d'équation $x^2 + y^2 = a^2$?

IV.A.2) Que peut-on dire de D_{t_0} par rapport à la droite

$$\Delta \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} ?$$

IV.A.3) En déduire une définition géométrique simple de S.

IV.B - Dessiner soigneusement en perspective la portion S' de S comprise entre les plans d'équations $z = 0$ et $z = a$.

IV.C - Calculer le volume de la région de l'espace intérieure à S, et comprise entre les plans d'équations $z = 0$ et $z = a$.

••• FIN •••